

Lukić P., Gocić M., Trajković S. 2013. *Prediction of annual precipitation on the territory of south Serbia using markov chains*. Bulletin of the Faculty of Forestry 108: 81-92.

Предраг Лукић  
Милан Гоцић  
Славиша Трајковић

UDK: 551.577:519.217(497.11-13)  
Оригинални научни рад  
DOI: 10.2298/GSF1308081L

## ПРЕДВИЂАЊЕ ГОДИШЊИХ ПАДАВИНА НА ТЕРИТОРИЈИ ЈУЖНЕ СРБИЈЕ ПРИМЕНОМ МАРКОВЉЕВИХ ЛАНАЦА

**Апстракт:** Предвиђање падавина представља један од битних фактора који утиче на секторе као што су индустрија, пољопривреда, заштита животне средине, као и њима сродне области. Стохастичка метода заснована на моделу Марковљевих ланаца је коришћена у раду за предвиђање годишњих падавина на територији јужне Србије за период од 2009-2013 године. У ту сврху, коришћене су количине падавина које су забележене на четири синоптичке станице за период од 1980-2010 године.

**Кључне речи:** Марковљев ланац, расподела фреквенције, матрица прелазних вероватноћа, вектор почетних стања, падавине

### PREDICTION OF ANNUAL PRECIPITATION ON THE TERRITORY OF SOUTH SERBIA USING MARKOV CHAINS

**Abstract:** Prediction of precipitation is one of the important factors that affect the sectors such as industry, agriculture, environmental protection, and their related fields. The stochastic method based on a Markov chain model is used in the paper to predict the annual precipitation in the territory of South Serbia for the period 2009-2013. For this purpose, the precipitation data rainfall recorded on the four synoptic stations were used for the period 1980-2010.

**Keywords:** Markov chain, frequency distribution, transition probability matrix, initial condition vector, precipitation

*мастер Предраг Лукић, студент докторских студија, Универзитет у Нишу - Грађевинско-архитектонски факултет, Ниш (e-mail: pedjoni87@hotmail.com)*

*мр Милан Гоцић, асистент, Универзитет у Нишу - Грађевинско-архитектонски факултет, Ниш  
др Славиша Трајковић, редовни професор, Универзитет у Нишу - Грађевинско-архитектонски факултет, Ниш*

## 1. УВОД

Анализа података о падавинама за одређени временски период може да пружи корисне информације које се могу применити у оквиру управљања водама, планирања пољопривредне производње или заштите животне средине.

У пракси се истичу четири технике које се користе за предвиђање падавина: статистичка техника, стохастичка метода, вештачка неуронска мрежа и нумеричка прогноза времена (Waymire, 1981; Ng and Panu, 2010). Последњих година, модели Марковљевих ланаца се често примењују за брзо добијање прогнозе времена помоћу информација о тренутном стању (Schoof and Pryor, 2008; Lennartsson *et al.*, 2008; Samuel Selvaraj and Tamil Salevi, 2010; Tamil Salevi and Samuel Selvaraj, 2011; Szynisyewska and Waylen, 2012; Vrugt *et al.*, 2013).

Циљ истраживања у овом раду је био предикција падавина на територији јужне Србије за период 2009-2013 година коришћењем Марковљевих ланаца првог реда. Ради постизања задатог циља извршено је поређење осматраних и прогнозираних вредности падавина за четири синоптичке станице за период 2006-2010 година и стварних вредности.

## 2. МАТЕРИЈАЛ И МЕТОД РАДА

### 2.1 Област истраживања и подаци

Подручје истраживања у раду обухвата територије четири града јужне Србије: Ниш, Врање, Лесковац и Куршумлија. Географске карактеристике изабраних синоптичких станица дате су у табели 1.

**Табела 1.** Географске карактеристике синоптичких станица обухваћених истраживањем  
**Table 1.** Geographical characteristics of the synoptic stations used in the study

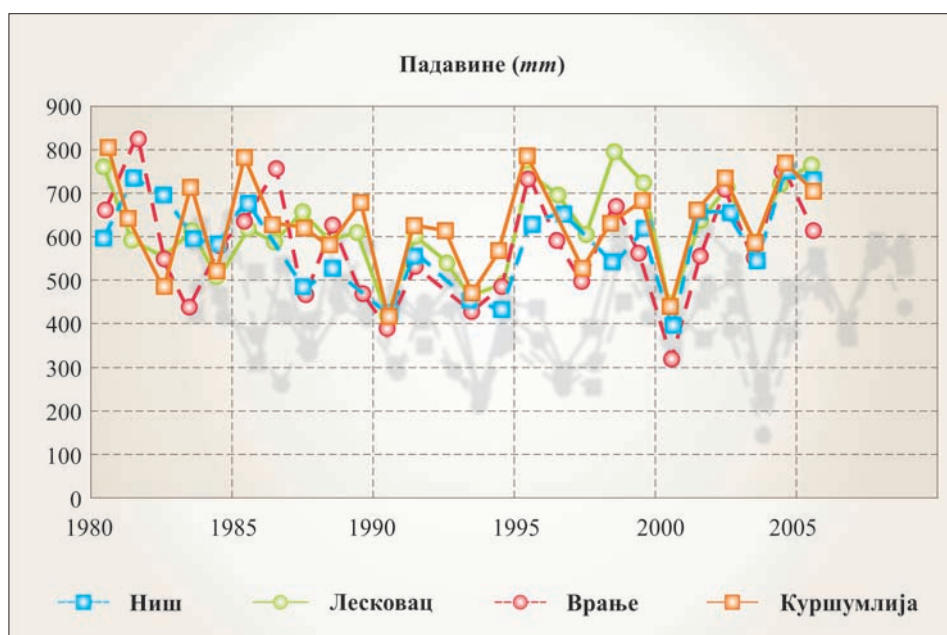
Назив станице	Географска дужина (E)	Географска ширина (N)	Надморска висина (m)
Ниш	21°54'	43°20'	204
Врање	21°55'	42°33'	432
Лесковац	21°57'	42°59'	230
Куршумлија	21°16'	43°08'	383

Подаци о падавинама добијени су на основу метеоролошких годишњака Републичког хидрометеоролошког завода Србије. Серије годишњих падавина за период од 1980. до 2005. године приказане су на графикону 1.

На основу примене теста кумулативних девијација (Buishand, 1982) испитани су подаци о падавинама на хомогеност. Добијене су следеће вредности: за Ниш 1,24; Врање 0,96; Лесковац 1,23 и Куршумлију 1,15. Пошто вредности не прелазе критичну вредност статистичког теста од 5% која износи 1,24 закључујемо да су посматрани низови падавина хомогени.

Применом аутокорељационе анализе (Kendall and Stuart, 1968; von Storch and Navarra, 1995) добијене су следеће вредности: за Ниш 0,355; Врање 0,157; Лесковац -0,021 и Куршумлију 0,208. Пошто једино вредност за станицу Ниш не припада опсегу вредности -0,385 и 0,318, извршено је елиминисање ефекта корелације (von Storch and Navarra, 1995; Gocic and Trajkovic, 2013a, б). Након тога је извршена примена Марковљевих ланаца.

Анализа података о падавинама спроведена на подручју Србије за период 1980-2010 (Gocic and Trajkovic, 2013б) показала је да су све станице имале опадајући тренд током фебруара и септембра, док су се у осталим месецима јављали како растући тако и опадајући трендови. Растући тренд је забележен током јесени и зиме. Такође, уочена су и два изразито сушна периода (1987-1994 и 2000-2003), док је изузетно сушна година била 2000 у свим градовима.



**Графикон 1.** Суме годишњих падавина у Нишу, Врању, Лесковцу и Куршумлији у периоду 1980-2005

**Diagram 1.** The sum of annual rainfall in Nis, Vranje, Leskovac and Kursumlija during the period 1980-2005

## 2.2 Модел Марковљевих ланаца

Руски математичар, Андреј Марков (Andrey A. Markov), развио је и описао теорију под називом Марковљеви ланци (Markov, 1907). Нека је дат систем  $S$  који се у сваком посматраном тренутку  $t_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) може наћи у једном (било којем) од стања  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , при чему број стања може бити коначан или пребројиво бесконачан. Ако се у моменту  $t_m$  систем  $S$  нашао у стању  $S_j$ , а у претходном тренутку  $t_{m-1}$  био у стању  $S_i$  и ако вероватноћа да се систем у тренутку  $t_m$  нађе у стању  $S_j$  зависи само од тога у ком стању је систем био у тренутку  $t_{m-1}$ , а не од тога у којим стањима је био у прошлости пре  $t_{m-1}$ , онда такав стохастички процес називамо Марковљевим ланцем.

За вероватноћу прелаза система из стања  $S_i$  у  $S_j$  означену са  $p_{ij}^{m-1,m}$  важи

$$p_{ij}^{m-1,m} = P(S(t_m) = S_j | S(t_{m-1}) = S_i) = P(S_j | S_i), \dots \dots \dots (1)$$

где је  $P(S_j | S_i)$  условна вероватноћа, тј. вероватноћа да се систем  $S$  у тренутку  $t_m$  нађе у стању  $S_j$ , под условом да је у тренутку  $t_{m-1}$  био у стању  $S_i$ .

Ако вероватноћа прелаза не зависи од  $t$ , тј. ако је  $p_{ij}^{m-1,m} = p_{ij}$ , онда се говори о хомогеном ланцу Маркова и посматра се као вероватноћа прелаза система из стања  $S_i$  у стање  $S_j$  у једном кораку, из било ког момента у наредни.

Пошто је  $i, j=1, 2, \dots, r$ , то се све могуће вероватноће прелаза из стања у стање могу приказати тзв. матрицом вероватноће прелаза  $P$  облика

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (2)$$

чији су елементи дефинисани са

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_n = s_j | X_{n-1} = s_i], \dots \dots \dots (3)$$

и представља вероватноћу прелаза из стања  $S_i$  у стање  $S_j$  у  $n$ -том кораку.

За матрицу  $P$  за коју важи  $\sum_{j=1}^r p_{ij}^{(n)} = 1, \forall i = 1, \dots, r$ , каже се да је стохастичка матрица.

Да би Марковљев ланац у целини описали, осим матрице прелазних вероватноћа треба познавати и вектор почетних вероватноћа, који представља стање Марковљевог ланца у почетном тренутку посматрања.

Вектор почетних вероватноћа означимо са

$$p(0) = (p_1(0), \dots, p_r(0)), \dots \dots \dots (4)$$

где је

$$p_i = P[X_0 = s_i], \dots \dots \dots (5)$$

вероватноћа да се систем у почетку нађе у стању  $S_i$ , а  $X_0$  случајна променљива.

Вектор стања у  $n$ -том кораку добија се као

$$p(n) = (p_1(n), \dots, p_r(n)) , \dots\dots\dots (6)$$

при чему је

$$p_i(n) = P [X_n = s_i] , \dots\dots\dots (7)$$

Евидентно је да вектори стања морају бити стохастички, тј. мора да важи

$$p_i(n) \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^r p_i(n) = 1, \dots\dots\dots (8)$$

### 3. РЕЗУЛТАТИ

Модел Марковљевих ланаца је искоришћен да се испита понашање годишњих падавина на територији јужне Србије (Нишу, Врању, Лесковцу и Куршумлији) у периоду 2006-2010 године. Ради израчунавања вероватноће прелаза, промене падавина су подељене у пет стања на једнаком интервалу у износу од 115 *mm*, која су представљена великим словима абетеце (А, В, С, D, Е). Фреквенција за годишње падавине у ова четири града је приказана у табели 2, која представља колико се пута дато стање (А, В, С, D, Е) понавља у опсегу датог интервала.

**Табела 2.** Расподела фреквенције годишњих падавина  
**Table 2.** Frequency distribution of annual precipitation

Интервал	Стање	Фреквенција			
		Ниш	Врање	Лесковац	Куршумлија
310-425	А	2	3	2	2
426-541	В	7	9	4	4
542-657	С	9	7	11	9
658-773	D	7	4	6	7
774-889	Е	1	3	3	4

За Марковљев ланац у коме су сва стања међусобно рекурентна, апериодична и повезана кажемо да је регуларан. Регуларном Марковљевом ланцу припада регуларна матрица прелазних вероватноћа, што значи да постоји  $n > 1$ , такав да је  $p_{ij}(n) > 0$ , за све  $i, j = 1, \dots, r$ . То значи, да Марковљев ланац из произвољног стања  $S_i$ , након одређеног броја корака може да пређе у било које друго стање. Матрице вероватноће прелаза су добијене као количник прелаза из стања у стање од А до Е, са фреквенцијом стања за сваки од посматраних градова Матрицама вероватноћа прелаза  $P_{ij}^{Ниш}$ ,  $P_{ij}^{Врање}$ ,  $P_{ij}^{Лесковац}$  и  $P_{ij}^{Куршумлија}$  представљене су годишње падавине за пет стања: ’

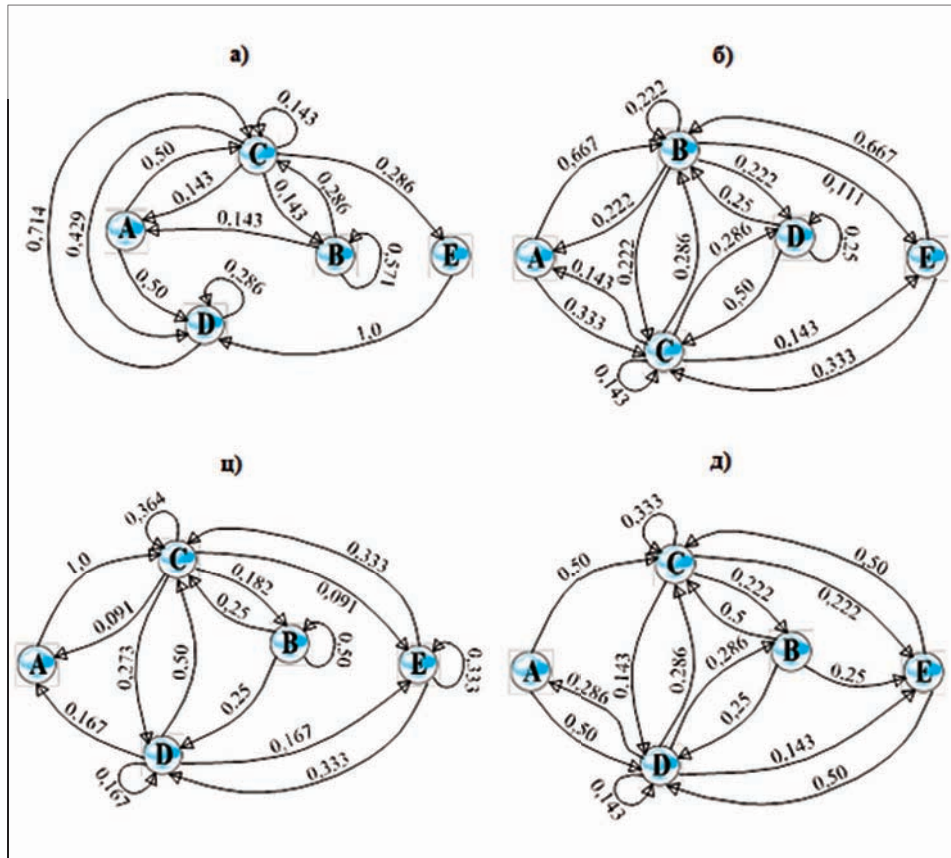
$$P_{ij}^{\text{Ниш}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,143 & 0,571 & 0,286 & 0 & 0 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,429 & 0,143 \\ 0 & 0 & 0,714 & 0,286 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P_{ij}^{\text{Врање}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,667 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0,222 & 0,222 & 0,222 & 0,222 & 0,111 \\ 0,143 & 0,286 & 0,143 & 0,286 & 0,143 \\ 0 & 0,250 & 0,500 & 0,250 & 0 \\ 0 & 0,667 & 0,333 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P_{ij}^{\text{Лесковац}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,500 & 0,250 & 0,250 & 0 \\ 0,091 & 0,182 & 0,364 & 0,273 & 0,091 \\ 0,167 & 0 & 0,500 & 0,167 & 0,167 \\ 0 & 0 & 0,333 & 0,333 & 0,333 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P_{ij}^{\text{Куршумлија}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,500 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,250 & 0,250 \\ 0 & 0,222 & 0,333 & 0,222 & 0,222 \\ 0,286 & 0,236 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,500 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

На слици 1 приказани су дијаграми транслације добијени на основу матрица вероватноћа за Ниш, Врање, Лесковац и Куршумлију у периоду од 1980. до 2005. године.



Слика 1. Дијаграми транслације за а) Ниш, б) Врање, ц) Лесковац и д) Куршумлија  
 Figure 1. Transition diagram for a) Nis, b) Vranje, c) Leskovac and d) Kursumlija

На основу једначина (4) и (5) су одређени вектори почетних вероватноћа за Ниш, Врање, Лесковац и Куршумлију у следећем облику:

$$p_{(0)}^{\text{Ниш}} = (0,000 \ 0,0000,571 \ 0,429 \ 0,000),$$

$$p_{(0)}^{\text{Врање}} = (0,122 \ 0,281 \ 0,197 \ 0,281 \ 0,122),$$

$$p_{(0)}^{\text{Лесковац}} = (0,100 \ 0,000 \ 0,433 \ 0,233 \ 0,233),$$

$$p_{(0)}^{\text{Куршумлија}} = (0,257 \ 0,280 \ 0,162 \ 0,151 \ 0,151),$$

док су коришћењем измерених података о падавинама за период од 1980-2005 године добијени вектори почетних вероватноћа за период од 2006-2010 године у следећем облику:

Ниш:

$$\begin{aligned}
 p_{(1)}^{Ниш} &= p_{(1)}^{Ниш} \cdot p_{ij}^{Ниш} = (0,082 \quad 0,082 \quad 0,388 \quad 0,368 \quad 0,082) \\
 p_{(2)}^{Ниш} &= p_{(2)}^{Ниш} \cdot p_{ij}^{Ниш} = (0,067 \quad 0,102 \quad 0,383 \quad 0,395 \quad 0,055) \\
 p_{(3)}^{Ниш} &= p_{(3)}^{Ниш} \cdot p_{ij}^{Ниш} = (0,069 \quad 0,113 \quad 0,399 \quad 0,366 \quad 0,055) \\
 p_{(4)}^{Ниш} &= p_{(4)}^{Ниш} \cdot p_{ij}^{Ниш} = (0,073 \quad 0,122 \quad 0,385 \quad 0,365 \quad 0,057) \\
 p_{(5)}^{Ниш} &= p_{(5)}^{Ниш} \cdot p_{ij}^{Ниш} = (0,073 \quad 0,125 \quad 0,387 \quad 0,363 \quad 0,055)
 \end{aligned}$$

Врање:

$$\begin{aligned}
 p_{(1)}^{Врање} &= p_{(1)}^{Врање} \cdot p_{ij}^{Врање} = (0,091 \quad 0,352 \quad 0,312 \quad 0,189 \quad 0,059) \\
 p_{(2)}^{Врање} &= p_{(2)}^{Врање} \cdot p_{ij}^{Врање} = (0,123 \quad 0,315 \quad 0,267 \quad 0,215 \quad 0,084) \\
 p_{(3)}^{Врање} &= p_{(3)}^{Врање} \cdot p_{ij}^{Врање} = (0,108 \quad 0,338 \quad 0,285 \quad 0,200 \quad 0,073) \\
 p_{(4)}^{Врање} &= p_{(4)}^{Врање} \cdot p_{ij}^{Врање} = (0,116 \quad 0,327 \quad 0,276 \quad 0,207 \quad 0,078) \\
 p_{(5)}^{Врање} &= p_{(5)}^{Врање} \cdot p_{ij}^{Врање} = (0,112 \quad 0,333 \quad 0,280 \quad 0,203 \quad 0,076)
 \end{aligned}$$

Лесковац:

$$\begin{aligned}
 p_{(1)}^{Лесковац} &= p_{(1)}^{Лесковац} \cdot p_{ij}^{Лесковац} = (0,078 \quad 0,079 \quad 0,452 \quad 0,235 \quad 0,156) \\
 p_{(2)}^{Лесковац} &= p_{(2)}^{Лесковац} \cdot p_{ij}^{Лесковац} = (0,080 \quad 0,122 \quad 0,432 \quad 0,234 \quad 0,132) \\
 p_{(3)}^{Лесковац} &= p_{(3)}^{Лесковац} \cdot p_{ij}^{Лесковац} = (0,078 \quad 0,140 \quad 0,429 \quad 0,231 \quad 0,122) \\
 p_{(4)}^{Лесковац} &= p_{(4)}^{Лесковац} \cdot p_{ij}^{Лесковац} = (0,078 \quad 0,148 \quad 0,425 \quad 0,231 \quad 0,188) \\
 p_{(5)}^{Лесковац} &= p_{(5)}^{Лесковац} \cdot p_{ij}^{Лесковац} = (0,077 \quad 0,151 \quad 0,424 \quad 0,231 \quad 0,177)
 \end{aligned}$$

Куршумлија:

$$\begin{aligned}
 p_{(1)}^{Куршумлија} &= p_{(1)}^{Куршумлија} \cdot p_{ij}^{Куршумлија} = (0,043 \quad 0,079 \quad 0,420 \quad 0,332 \quad 0,128) \\
 p_{(2)}^{Куршумлија} &= p_{(2)}^{Куршумлија} \cdot p_{ij}^{Куршумлија} = (0,095 \quad 0,188 \quad 0,312 \quad 0,246 \quad 0,160) \\
 p_{(3)}^{Куршумлија} &= p_{(3)}^{Куршумлија} \cdot p_{ij}^{Куршумлија} = (0,070 \quad 0,140 \quad 0,361 \quad 0,279 \quad 0,151) \\
 p_{(4)}^{Куршумлија} &= p_{(4)}^{Куршумлија} \cdot p_{ij}^{Куршумлија} = (0,080 \quad 0,160 \quad 0,341 \quad 0,266 \quad 0,155) \\
 p_{(5)}^{Куршумлија} &= p_{(5)}^{Куршумлија} \cdot p_{ij}^{Куршумлија} = (0,076 \quad 0,152 \quad 0,349 \quad 0,271 \quad 0,154)
 \end{aligned}$$

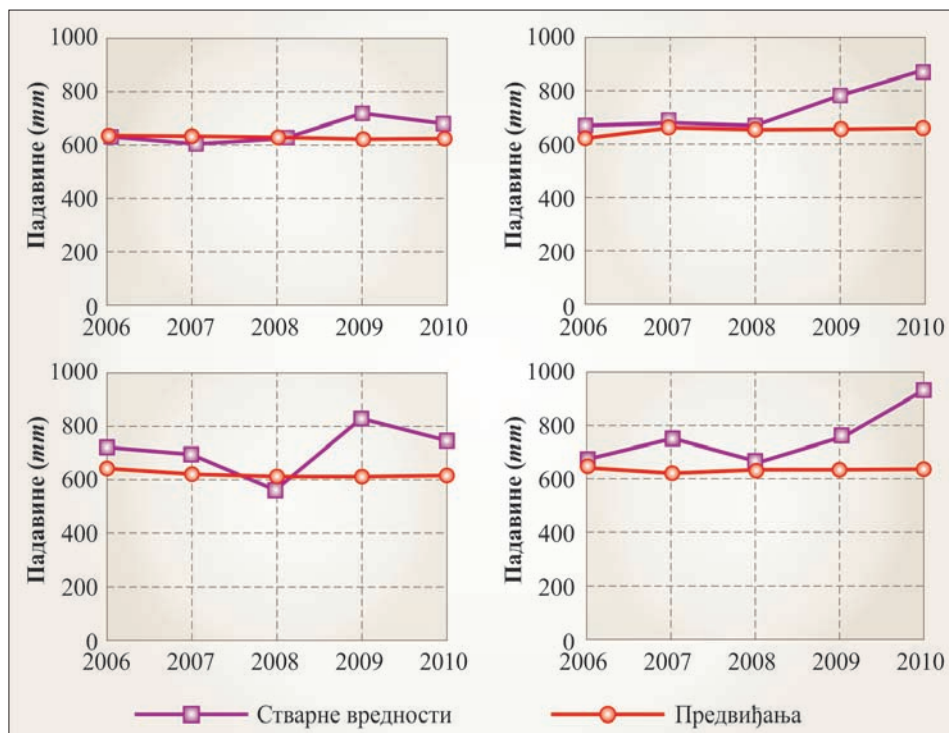
Применом дефинисаних стања из табеле 2 и вектора почетних вероватноћа, израчунате су вредности падавина на територији Ниша, Врања, Лесковца и Куршумлије за период од 2006-2010 године (табела 3).

Табела 3. Предвиђање падавина за период од 2006-2010

Table 3. Prediction of precipitation for the period 2006-2010

Предвиђање падавина	2006	2007	2008	2009	2010
Ниш (mm)	633,88	631,90	626,80	625,18	624,73
Врање (mm)	547,97	581,25	577,77	579,16	578,47
Лесковац (mm)	635,69	624,56	620,26	618,41	618,06
Куршумлија (mm)	649,77	621,91	635,02	630,40	632,60





Графикон 2. Упоређивање стварних и предвиђених вредности годишњих падавина за период 2006-2010 година у Нишу, Врању, Лесковцу и Куршумлији

Diagram 2. Comparison of actual and predicted values of precipitation for the period 2006-2010 in Nis, Vranje, Leskovac and Kursumlija



Графикон 3. Предвиђање падавина на делу јужне Србије за период 2009-2013

Diagram 3. Prediction of precipitation in the southern part of Serbia for the period 2009-2013

На графикону 2 дат је приказ упоређивања стварних и предвиђених падавина за период од 2006-2010 године на делу јужне Србије.

На графикону 3 дат је приказ годишњих падавина на делу јужне Србије за период од 2009-2013 године, који је представљен као средња вредност предвиђених годишњих падавина на територији посматраних градова.

#### 4. ДИСКУСИЈА

На основу графикана 2 може се закључити да предвиђање за 2006 и 2007 годину за Ниш и Куршумлију у потпуности одговара измереним вредностима, а да што се број година за предвиђање повећава прецизност предикције се смањује. Одступања при предикцији падавина за период 2006-2010 су у опсегу од 2,4 *mm* у Нишу до 304,4 *mm* у Куршумлији.

**Табела 4.** Оцене слагања мерених и прорачунатих вредности падавина на основу вредности статистичких показатеља

**Table 4.** Assessment of measured values weighed against calculated precipitation values on the basis of statistical indicators

Предвиђање падавина	RMSE (mm)	RE	MAE (mm)
Ниш	47,53	0,07	37,19
Врање	132,92	0,20	94,84
Лесковац	121,86	0,17	108,43
Куршумлија	159,58	0,21	125,50

У табели 4 су приказане оцене слагања измерених и израчунатих вредности падавина на основу следећих статистичких показатеља: средње квадратне грешке (RMSE), релативне грешке (RE) и средње апсолутне грешке (MAE). На основу датих оцена може се закључити да је најбоља предикција падавина за период 2006-2010 остварена за град Ниш.

#### 5. ЗАКЉУЧАК

Основни циљ овог рада је био предвиђање годишњих падавина за четири града на делу југоисточне Србије (Ниша, Врања, Лесковца и Куршумлије) за период 2006-2010 година применом модела Марковљевих ланаца.

Можемо закључити да предвиђање овог модела не даје баш велике тачности са стварним вредностима. Количине падавина варирају у опсегу од 2,4 *mm* до

неких 304,4 mm на годишњем нивоу. Марковљеви ланци првог реда и метода матрице вероватноће прелаза се користе за израчунавање релативне и кумулативне вероватноће падавина уз минималне рачунске кораке који су нам потребни за извођење резултата.

Будући рад би се заснивао на побољшању предикције суше коришћењем Марковљевих ланаца вишег реда и индикатора суше.

**Напомена:** Рад је реализован у оквиру пројекта „Развој хидроинформационог система за праћење и рану најаву суша“ (ТР 37003) који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије у оквиру програма Технолошког развоја за период 2011-2014. године.

### ЛИТЕРАТУРА

- Buishand T.A. (1982): *Somemethods for testing the homogeneity of rainfall records*, Journal of Hydrology 58 (11-27)
- Gocic M., Trajkovic S. (2013a): *Analysis of changes in meteorological variables using Mann-Kendall and Sen's slope estimator statistical tests in Serbia*, Global and Planetary Change 100 (172-182)
- Gocic M., Trajkovic S. (2013b): *Analysis of precipitation and drought data in Serbia over the period 1980–2010*, Journal of Hydrology, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.04.044> (in press)
- Kendall M. G., Stuart A. (1968): *The advanced theory of statistics: Design and analysis, and time-series*, Vol. 3, Charles Griffin & Company Limited, London
- Lennartsson J., Baxevani A., Chen D. (2008): *Modelling precipitation in Sweden using multiple step Markov chains and a composite model*, Journal of Hydrology 363 (42-59)
- Markov A. (1907): *Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain*, The Notes of the Imperial Academy of Sciences of St. Petersburg, VIII Series, Physio-Mathematical College XXII, No. 9
- Ng W. W., Panu U. S. (2010): *Comparisons of traditional and novel stochastic models for the generation of daily precipitation occurrences*, Journal of Hydrology 380 (222-236)
- Samuel Selvaraj R., Tamil Salevi S. (2010): *Stochastic Modelling of Daily Rainfall at Aduthurai*, International Journal of Advanced Computer and Mathematical Sciences 1 (52-57)
- Schoof J. T., Pryor S. C. (2008): *On the Proper Order of Markov Chain Model for Daily Precipitation Occurrence in the Contiguous United States*, Journal of Applied Meteorology and Climatology 47 (2477–2486)
- von Storch H., Navarra A. (1995): *Analysis of Climate Variability – Applications of Statistical Techniques*, Springer-Verlag, New York
- Szyniszewska M. A., Waylen R. P. (2012): *Determining the daily rainfall characteristics from the monthly rainfall totals in central and northeastern Thailand*, Applied Geography 35 (377-393)
- Tamil Salevi S., Samuel Selvaraj R. (2011): *Stochastic Modelling of Annual Rainfall at Tamil Nadu*, Universal Journal of Environmental Research and Technology 1 (566-570)

Vrugt A. J., ter Braak J. F. C., Diks G. H. C., Schoups G. (2013): *Hydrologic data assimilation using particle Markov chain Monte Carlo simulation: Theory, concepts and applications*, *Advances in Water Resources* 51 (457-478)

Waymire E. (1981): *The mathematical structure of rainfall representations. A review of the stochastic rainfall models*, *Water Resources Research* 17 (1261–1272)

Predrag Lukić  
Milan Gocić  
Slaviša Trajković

### **PREDICTION OF ANNUAL PRECIPITATION ON THE TERRITORY OF SOUTH SERBIA USING MARKOV CHAINS**

#### **Summary**

Analysis of changes in climate parameters is an important issue in decision making about the everyday climate change. Therefore, the precipitation prediction is one of the factors that affect the sectors such as industry, agriculture, environmental protection, and their related fields. Different methods were in use for a long time for determining the size of precipitation, which can be summarized as statistical techniques, stochastic methods, artificial neural networks and numerical weather prediction.

This paper presents the use of a stochastic method based on the Markov chain model to predict the annual precipitation in the territory of South-eastern Serbia for the period 2009-2013. The Markov chain model has the following advantages: (1) the forecasts are immediately available after the observations are done and (2) it needs minimal computation after the meteorological data have been processed.

It was shown that the results obtained using the Markov chain model did not provide more accuracy for a long range forecasting. Besides, it can be concluded that the forecast for 2006 and 2007 in Nis and Kursumlija fully corresponds to the actual values, while as the number of years for prediction increases, the accuracy of prediction is reduced. Deviations in precipitation prediction for the period 2006-2010 were in the range of 2.4 mm (Nis) to 304.4 mm (Kursumlija).